

LIMITI DI FUNZIONI IN \mathbb{R}^n

Definizioni

Definizione 1. Siano Ω un sottoinsieme qualsiasi di \mathbb{R}^d e $X_0 \in \Omega$ un punto fissato in Ω . Sia $F : \Omega \setminus \{X_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.

(1) Diciamo che il numero reale ℓ è il limite di F per $X \rightarrow X_0$ e scriviamo

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell, \quad (1)$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\boxed{\text{per ogni } X \in \Omega \text{ tale che } |X - X_0| < \delta \text{ si ha che } |F(X) - \ell| < \varepsilon.}$$

che possiamo scrivere in modo equivalente come

$$\boxed{X \in \Omega \cap B_\delta(X_0) \Rightarrow |F(X) - \ell| < \varepsilon.}$$

(2) Diciamo che F tende a più infinito per $X \rightarrow X_0$ e scriviamo

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = +\infty, \quad (2)$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\boxed{\text{per ogni } X \in \Omega \text{ tale che } |X - X_0| < \delta \text{ si ha che } F(X) > M.}$$

o equivalentemente

$$\boxed{X \in \Omega \cap B_\delta(X_0) \Rightarrow F(X) > M.}$$

Inoltre, se X_0 è un punto della parte interna di Ω , allora scriveremo semplicemente

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = \ell \quad e \quad \lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = +\infty$$

al posto di (1) e (2).

Alcune regole algebriche per il calcolo dei limiti

Proposizione 2. Siano Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^d ed $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzione a valori reali. Sia $X_0 \in \partial\Omega$ un punto tale che $X_0 \notin \Omega$. Se

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = a \quad e \quad \lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} G(X) = b,$$

allora

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} (F + G) = a + b \quad e \quad \lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} FG = ab.$$

Inoltre, se $b \neq 0$, allora

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} \frac{F(X)}{G(X)} = \frac{a}{b}.$$

Proposizione 3. Siano Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^d ed $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzione a valori reali. Sia $X_0 \in \partial\Omega$ un punto tale che $X_0 \notin \Omega$. Se

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = +\infty$$

e se G è una funzione limitata, allora

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} \frac{G}{F} = 0.$$

Limiti lungo i raggi uscenti da un punto

Proposizione 4. Siano Ω un insieme in \mathbb{R}^n , X_0 un punto della sua parte interna $\overset{\circ}{\Omega}$ ed $F : \Omega \setminus \{X_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Se esiste il limite

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = \ell,$$

allora per ogni vettore non-nullo $V \in \mathbb{R}^n$ esiste anche il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(X_0 + tV) = \ell. \quad (3)$$

Osservazione 5. Osserviamo che se V e W sono due vettori colineari e non-nulli, allora

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(X_0 + tV) = \lim_{t \rightarrow 0^+} F(X_0 + tW).$$

È sufficiente quindi calcolare i limiti direzionali (3) solo per i vettori V di norma 1.

Osservazione 6 (Limiti e coordinate polari). Osserviamo che in \mathbb{R}^2 ogni vettore V di norma 1 si può scrivere come

$$V = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{per un qualche } \theta \in [0, 2\pi).$$

Allora, data una funzione $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{X_0 := (x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(X_0 + tV)$$

si può scrivere come

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(X_0 + tV) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta).$$

In questo, la porposizione precedente implica che se esiste il limite

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = \ell,$$

allora, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ si ha che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) = \ell.$$

Negli esempi concreti, [Proposizione 4](#) si può usare per dimostrare la non-esistenza di limite in un determinato punto. Infatti, se si trovano due vettori non-nulli V, W tali che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(X_0 + tV) \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} F(X_0 + tW),$$

allora il limite

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X)$$

non esiste.

Esercizio 7. Data la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

calcolare il limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(tV)$ al variare del vettore non-nullo $V = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 8. Data la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4},$$

calcolare il limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(tV)$ al variare del vettore non-nullo $V = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 9. Data la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^4},$$

calcolare il limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(tV)$ al variare del vettore non-nullo $V = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 10. Data la funzione

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4 + z^6},$$

calcolare il limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(tV)$ al variare del vettore non-nullo $V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Uno può congetturare, per esempio che, se per ogni vettore $V \in \mathbb{R}^n$ esiste il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(X_0 + tV) = \ell,$$

e questo limite è lo stesso per ogni vettore V , allora esiste (ed è uguale a ℓ) anche il limite

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X).$$

Questo non è vero!

Esempio 11. Definiamo in \mathbb{R}^2 la funzione seguente:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^4 < |y| < x^2, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora:

(1) per ogni vettore $V \in \mathbb{R}^2$ si ha che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(tV) = 1;$$

(2) il limite

$$\lim_{X \rightarrow 0} F(X).$$

non esiste. Infatti, esistono due successioni di punti $X_n \rightarrow 0$ e $Y_n \rightarrow 0$ tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(Y_n) = 0.$$

Limiti e coordinate polari

Proposizione 12. Sia $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.

Dato un numero reale ℓ , sono equivalenti:

- (i) $\lim_{X \rightarrow 0} F(X) = \ell$;
- (ii) $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left\{ \sup_{\partial B_\rho} |F - \ell| \right\} = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che (i) non vale. Allora esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione $X_n \rightarrow 0$ tali che

$$|F(X_n) - \ell| > \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $\rho_n := |X_n|$. Allora, abbiamo che

$$\rho_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \sup_{\partial B_{\rho_n}} |F - \ell| \geq |F(X_n) - \ell| > \varepsilon,$$

e quindi (ii) non vale.

Supponiamo che (ii) non vale. Allora, esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione $\rho_n \rightarrow 0$ tali che

$$\sup_{\partial B_{\rho_n}} |F - \ell| > \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, su ogni sfera ∂B_{ρ_n} esiste un punto X_n tale che

$$|F(X_n) - \ell| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siccome $|X_n| = \rho_n \rightarrow 0$, abbiamo che (i) non vale. □

In dimensione due possiamo riscrivere la proposizione precedente nel modo seguente:

Proposizione 13. Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Dato $\ell \in \mathbb{R}$, sono equivalenti:

- (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = \ell$;
- (ii) $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left\{ \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \ell| \right\} = 0$.

Esempio 14. Studiare il limite

$$\ell := \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) \quad \text{dove} \quad F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)}.$$

Soluzione. In coordinate polari abbiamo

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho \sin \theta}{\rho(1 + \rho^{-2} \sin^2 \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 + \rho^{-2} \sin^2 \theta}.$$

Osserviamo che quando $\theta = 0$, la funzione F è zero per ogni ρ . Di conseguenza, se il limite ℓ esiste deve per forza essere uguale a zero. Per verificare se effettivamente $\ell = 0$, fissiamo $\rho > 0$ e studiamo la funzione

$$f_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\rho(\theta) := \frac{\sin \theta}{1 + \rho^{-2} \sin^2 \theta}.$$

Per trovare il massimo di f_ρ su $[0, 2\pi]$, calcoliamo la derivata

$$f'_\rho(\theta) = \frac{\cos \theta (1 - \rho^{-2} \sin^2 \theta)}{(1 + \rho^{-2} \sin^2 \theta)^2}.$$

Quindi, abbiamo le seguenti possibilità per il punto di massimo θ_M del modulo $|f_\rho|$:

(1) il massimo è raggiunto negli estremi dell'intervallo: $\theta_M = 0$ oppure $\theta_M = 2\pi$;

(2) $\cos(\theta_M) = 0$;

(3) $\sin(\theta_M) = \pm\rho$.

Nel caso (1), abbiamo semplicemente che $f_\rho(\theta_M) = 0$.

Nel caso (2), osserviamo che necessariamente $\sin(\theta_M) = \pm 1$ e quindi

$$|f_\rho|(\theta_M) = \frac{1}{1 + \rho^{-2}} = \frac{\rho^2}{1 + \rho^2}.$$

Nel caso (3), abbiamo che

$$|f_\rho|(\theta_M) = \frac{\rho}{2}.$$

Quindi,

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} f_\rho = \max \left\{ 0, \frac{\rho^2}{1 + \rho^2}, \frac{\rho}{2} \right\} = \frac{\rho}{2}.$$

Di conseguenza

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \right\} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho}{2} = 0$$

e quindi il limite ℓ esiste ed è uguale a zero. □

Liminf e limsup

Definizione 15. Siano Ω un sottoinsieme qualsiasi di \mathbb{R}^d e $X_0 \in \Omega$ un punto fissato in Ω .

Sia $F : \Omega \setminus \{X_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.

- Definiamo $\limsup_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X)$ come

$$\sup \left\{ \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \text{esiste una successione } X_n \rightarrow X_0, X_n \in \Omega, \text{ tale che } \lim_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = \ell \right\}.$$

- Definiamo $\liminf_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X)$ come

$$\inf \left\{ \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \text{esiste una successione } X_n \rightarrow X_0, X_n \in \Omega, \text{ tale che } \lim_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = \ell \right\}.$$

Inoltre, se X_0 è un punto della parte interna di Ω , allora scriveremo semplicemente

$$\limsup_{X \rightarrow X_0} F(X) \quad \text{e} \quad \liminf_{X \rightarrow X_0} F(X).$$

Osservazione 16. Se

$$\liminf_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

allora esiste (ed è uguale a ℓ) il limite

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell. \tag{4}$$

Viceversa, se esiste il limite (4), allora

$$\liminf_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell.$$

Proposizione 17. Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:

$$(i) \quad \limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\};$$

$$(ii) \quad \limsup_{\rho \rightarrow 0^+} \left\{ \sup_{\theta \in [0,2\pi]} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right\} = L.$$

Proposizione 18. Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:

$$(i) \quad \liminf_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\};$$

$$(ii) \quad \liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \left\{ \inf_{\theta \in [0,2\pi]} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right\} = L.$$

Esempio 19. Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x,y) \rightarrow (0,0)$, della funzione seguente:

$$F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 + y^2)}.$$

Soluzione. In coordinate polari abbiamo

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho \sin \theta}{\rho(1 + \rho^2 \sin^2 \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 + \rho^2 \sin^2 \theta}.$$

Fissiamo $\rho > 0$ e studiamo la funzione

$$f_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\rho(\theta) := \frac{\sin \theta}{1 + \rho^2 \sin^2 \theta}.$$

Per trovare il massimo e il minimo di f_ρ su $[0, 2\pi]$, calcoliamo la derivata

$$f'_\rho(\theta) = \frac{\cos \theta (1 - \rho^2 \sin^2 \theta)}{(1 + \rho^2 \sin^2 \theta)^2}.$$

Quindi, abbiamo le seguenti possibilità per i punti di massimo e di minimo, θ_M e θ_m , di f_ρ :

- (1) θ_M (rispettivamente θ_m) è uno degli estremi dell'intervallo $[0, 2\pi]$;
- (2) $\cos(\theta_M) = 0$ (rispettivamente $\cos(\theta_m) = 0$);
- (3) $\sin(\theta_M) = \pm \frac{1}{\rho}$ (rispettivamente $\sin(\theta_m) = \pm \frac{1}{\rho}$).

Nel caso (1), abbiamo che

$$f_\rho(0) = f_\rho(2\pi) = 0.$$

Nel caso (2), osserviamo che:

$$\text{se } \cos \theta = 0 \text{ allora necessariamente } \sin(\theta) = 1 \text{ oppure } \sin(\theta) = -1$$

e quindi

$$f_\rho(\theta) = \frac{1}{1 + \rho^2} \quad \text{oppure} \quad f_\rho(\theta) = -\frac{1}{1 + \rho^2}.$$

Il caso (3) invece non può verificarsi se $\rho > 1$.

Mettendo insieme i tre casi, abbiamo:

$$\max_{\theta \in [0,2\pi]} f_\rho = \frac{1}{1 + \rho^2} \quad \text{e} \quad \min_{\theta \in [0,2\pi]} f_\rho = -\frac{1}{1 + \rho^2}.$$

Di conseguenza,

$$\liminf_{X \rightarrow 0} F(X) = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \min_{[0, 2\pi]} f_\rho \right\} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1 + \rho^2} \right) = -1,$$

$$\limsup_{X \rightarrow 0} F(X) = \limsup_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \max_{[0, 2\pi]} f_\rho \right\} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \rho^2} = 1.$$

Il limite $\liminf_{X \rightarrow 0} F(X)$ invece non esiste. □

Osservazione 20. Osserviamo che date due funzioni

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

valgono le disuguaglianze

$$\sup_{[0, 2\pi]} f + \inf_{[0, 2\pi]} g \leq \sup_{[0, 2\pi]} (f + g) \leq \sup_{[0, 2\pi]} f + \sup_{[0, 2\pi]} g; \quad (5)$$

$$\inf_{[0, 2\pi]} f + \inf_{[0, 2\pi]} g \leq \inf_{[0, 2\pi]} (f + g) \leq \inf_{[0, 2\pi]} f + \sup_{[0, 2\pi]} g. \quad (6)$$

In particolare, se si ha che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |g_\rho(\theta)| \right\} = 0,$$

allora

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} (f_\rho(\theta) + g_\rho(\theta)) \right\} = \limsup_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} f_\rho(\theta) \right\};$$

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} (f_\rho(\theta) + g_\rho(\theta)) \right\} = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} f_\rho(\theta) \right\}.$$

Esempio 21. Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, della funzione seguente:

$$F(x, y) := \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Soluzione. Scriviamo la funzione F in coordinate polari come

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\sin(\rho \sin \theta)}{\rho}.$$

Ora, ricordiamo che siccome

$$\sin y = y + O(y^3),$$

esistono costanti $R > 0$ e $C > 0$ tali che

$$|\sin y - y| \leq C|y|^3 \quad \text{per ogni } y \in (-R, R).$$

Di conseguenza, possiamo scrivere $F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ come

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\sin(\rho \sin \theta)}{\rho} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho} + \frac{\sin(\rho \sin \theta) - \rho \sin \theta}{\rho} = \sin \theta + g_\rho(\theta),$$

dove, per $\rho < R$, abbiamo

$$|g_\rho(\theta)| \leq \frac{C|\rho \sin \theta|^3}{\rho} \leq C\rho^2 \quad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi].$$

Quindi

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{\sin(\rho \sin \theta)}{\rho} \right\} = \limsup_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \sin \theta \right\} = 1,$$
$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{\sin(\rho \sin \theta)}{\rho} \right\} = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} \sin \theta \right\} = -1.$$

□

Esercizi sui limiti, liminf e limsup

Esercizio 22. Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, delle funzioni seguenti:

(1) $F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - xy}$;

(2) $F(x, y) = \frac{x^2 - xy^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

(3) $F(x, y) = \frac{x^3 + x^2y^2}{x^2 + y^2}$;

(4) $F(x, y) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(5) $F(x, y) = \frac{e^{x+y} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(6) $F(x, y) = \frac{e^x - e^y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(7) $F(x, y) = \frac{\cos(\sqrt{x^2 + y^2}) - \cos x}{x^2 + y^2}$;

(8) $F(x, y) = \frac{\cos(x) - \cos(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(9) $F(x, y) = \frac{(e^y - 1) \sin x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

Definizione di $o(\rho)$ e $o(\rho^k)$

Definizione 23. Consideriamo una famiglia di funzioni

$$g_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

che dipende dal parametro $\rho > 0$. Diciamo che

$$g_\rho = o(\rho^k) \quad \left(\text{a volte si scrive anche } g_\rho(\theta) = o(\rho^k) \right),$$

se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|g_\rho(\theta)|}{\rho^k} \right\} = 0.$$

Scriveremo invece

$$g_\rho = O(\rho^k) \quad \left(\text{o anche } g_\rho(\theta) = O(\rho^k) \right),$$

se si ha

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|g_\rho(\theta)|}{\rho^k} \right\} < +\infty.$$

Proposizione 24. *Siano*

$$f_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad g_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

due famiglie di funzioni su $[0, 2\pi]$ dipendendi dal parametro $\rho > 0$. Allora, valgono le proprietà seguenti:

- Se $g_\rho = o(\rho^k)$, allora $g_\rho = O(\rho^k)$.
- Se $g_\rho = O(\rho^k)$, allora $g_\rho = o(\rho^n)$ per ogni $n = 0, 1, \dots, k - 1$.
- Se $f_\rho = O(\rho^k)$ e $g_\rho = O(\rho^n)$, allora $f_\rho g_\rho = O(\rho^{k+n})$.
- Se $f_\rho = O(\rho^k)$ e $g_\rho = o(\rho^n)$, allora $f_\rho g_\rho = o(\rho^{k+n})$.
- Se $f_\rho = O(\rho^k)$ e $g_\rho = O(\rho^k)$, allora $f_\rho + g_\rho = O(\rho^k)$.
- Se $f_\rho = o(\rho^k)$ e $g_\rho = o(\rho^k)$, allora $f_\rho + g_\rho = o(\rho^k)$.

Infine, data una funzione di una variabile $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, abbiamo che:

(F1) se $F(t) = O(t^n)$, per un qualche $n \geq 1$, e $g_\rho = o(\rho^k)$ per un $k \geq 0$, allora $F \circ g_\rho = o(\rho^{kn})$;

(F2) se $F(t) = o(t^n)$ per un $n \geq 0$ e $g_\rho = O(\rho^k)$ con $k \geq 1$, allora $F \circ g_\rho = o(\rho^{kn})$;

(F3) se $F(t) = O(t^n)$ per un $n \geq 0$ e $g_\rho = O(\rho^k)$ con $k \geq 1$, allora $F \circ g_\rho = O(\rho^{kn})$;

dove $F \circ g_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione composta $(F \circ g_\rho)(\theta) = F(g_\rho(\theta))$.

Dimostrazione. Dimostriamo gli ultimi tre punti della proposizione. Supponiamo che

$$F(t) = O(t^n) \quad \text{con} \quad n \geq 1$$

e

$$g_\rho = o(\rho^k) \quad \text{con} \quad k \geq 0.$$

Allora

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|F(g_\rho(\theta))|}{\rho^{nk}} = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left\{ \frac{|F(g_\rho(\theta))|}{|g_\rho(\theta)|^n} \frac{|g_\rho(\theta)|^n}{\rho^{nk}} \right\} \leq \left(\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|F(g_\rho(\theta))|}{|g_\rho(\theta)|^n} \right) \left(\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|g_\rho(\theta)|}{\rho^k} \right)^n. \quad (7)$$

Ora, siccome $\sup_\theta |g_\rho(\theta)|$ tende a zero per $\rho \rightarrow 0$, il primo termine in (7) è limitato, mentre il secondo tende a zero il che conclude la dimostrazione del primo degli ultimi tre punti. Per

Invece, supponendo che valgono le ipotesi del punto (F2),

$$F(t) = o(t^n) \quad \text{con} \quad n \geq 0$$

e

$$g_\rho = O(\rho^k) \quad \text{con} \quad k \geq 1,$$

abbiamo che il primo termine in (7) tende a zero mentre il secondo è limitato. Il punto (F3) è analogo. \square

Esempio 25.

- $\sin(\rho \sin \theta) = O(\rho)$;
- $\sin(\rho \cos \theta) = O(\rho)$;
- $\sin(\rho \sin \theta) - \rho \sin \theta = O(\rho^3)$;
- $\sin(\rho \cos \theta) - \rho \cos \theta = O(\rho^3)$;
- $\cos(\rho \sin \theta) - 1 = O(\rho^2)$;
- $e^{\rho \sin \theta} - 1 = O(\rho)$;
- $e^{\rho \cos \theta} - 1 - \rho \cos \theta - \frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \theta = O(\rho^3)$ che possiamo scrivere in maniera equivalente anche come

$$e^{\rho \cos \theta} = 1 + \rho \cos \theta + \frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \theta + O(\rho^3).$$

Funzioni in coordinate polari

Ricordiamo che per ogni vettore $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tale che $a^2 + b^2 = 1$ esiste un unico $\theta \in [0, 1)$ tale che

$$a = \cos \theta \quad \text{e} \quad b = \sin \theta.$$

Di conseguenza, per ogni vettore non-nullo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esiste un'unica coppia di numeri

$$\rho \in (0, +\infty) \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

tale che

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \rho \sin \theta, \tag{8}$$

dove

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Di conseguenza, data una qualsiasi famiglia di funzioni

$$f_\rho : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

parametrizzata da $\rho \in (0, +\infty)$, possiamo definire la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) := f_\rho(\theta),$$

dove, per ogni fissato vettore non-nullo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ρ e θ sono dati da (8). Si ha quindi

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = f_\rho(\theta) \quad \text{per ogni} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Possiamo quindi studiare il comportamento locale di funzioni di due variabili espresse direttamente in coordinate polari.

Esempio 26. Studiare il comportamento (limite, liminf e limsup) nell'origine $(x, y) = (0, 0)$ delle seguenti funzioni funzione F espresse direttamente in coordinate polari $\rho \in (0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$$(1) \quad F(\rho, \theta) = \frac{\theta(1 - \theta)}{1 + \rho\theta};$$

$$(2) \quad F(\rho, \theta) = \frac{\theta}{1 + \theta/\rho};$$

$$(3) \quad F(\rho, \theta) = \frac{\sin(\theta\rho)}{e^{\theta\rho} - 1}.$$

Qualche considerazione finale

Ci possiamo chiedere quindi per quali famiglie di funzioni $f(\rho, \cdot)$, parametrizzate da $\rho \in (0, +\infty)$ e definite sull'intervallo $[0, 2\pi)$, esiste un'espansione di Taylor della forma

$$f(\rho, \theta) := f_0(\theta) + f_1(\theta)\rho + f_2(\theta)\rho^2 + f_3(\theta)\rho^3 + \cdots + f_k(\theta)\rho^k + o(\rho^k), \tag{9}$$

dove

$$f_j : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

sono funzioni limitate per ogni $j = 0, \dots, k$. (È immediato dimostrare che se una tale espansione esiste, allora è anche unica.)

Osserviamo che un'espansione della forma (9) esiste, nel caso in cui la famiglia di funzioni $f(\rho, \cdot) : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ è stata generata da un polinomio di due variabili

$$f(\rho, \theta) = P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Per esempio, $f(\rho, \theta) = \rho^n \cos^n \theta$ oppure $f(\rho, \theta) = \rho^n \cos(n\theta)$. Altri esempi sono le funzioni

$$e^{\rho \sin \theta}, \quad \ln(1 + \rho \sin \theta), \quad \frac{1}{1 + \rho \cos \theta}, \quad \sqrt{1 + \rho^2 \sin \theta \cos \theta}.$$